

پاسخنامه تشریحی

گزینه ۱ فاصله طولی بین ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{2} = 1 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow y = 1 + a \cdot \cos(\pm\pi x) = 1 + a \cdot \cos \pi x$$

از طرفی $f(1) = 3$ بنابراین داریم:

$$3 = 1 + a \cos(\pi(1)) \Rightarrow 3 = 1 + a \cos(\pi) \Rightarrow 3 = 1 + a(-1) \Rightarrow a = -2$$

گزینه ۲ دوره تناوب توابع $y = \cos ax$ و $y = \sin ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد و توجه کنید که توان فرد در دوره تناوب تأثیر ندارد و توان زوج دوره تناوب را نصف می‌کند.

$$y = \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$$

$$y = 3 \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow T_2 = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{پس: } \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{\frac{\pi}{3}} = \frac{9}{\pi}$$

گزینه ۳ می‌دانیم $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$ بنابراین $y = b \sin ax$

از طرفی دوره تناوب تابع $f(x) = b \sin ax$ به صورت $\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

همچنین از روی نمودار تابع دوره تناوب تابع برابر است با 4π در نتیجه:

$$\frac{2\pi}{|a|} = 4\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار $f(\pi) = -2$ می‌باشد.

$$f(\pi) = b \sin a\pi \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} b \sin \frac{\pi}{2} = b = -2 \rightarrow ab = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + bx\right) \xrightarrow{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha} f(x) = a \cos bx$$

نمودار تابع از نقطه $\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}$ عبور می‌کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = a \cos 0 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

می‌دانیم دوره تناوب $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{3T}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3$$

$$\text{پس: } f(x) = -2 \cos(\pm 3x) \xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos \alpha} f(x) = -2 \cos 3x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{4} = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

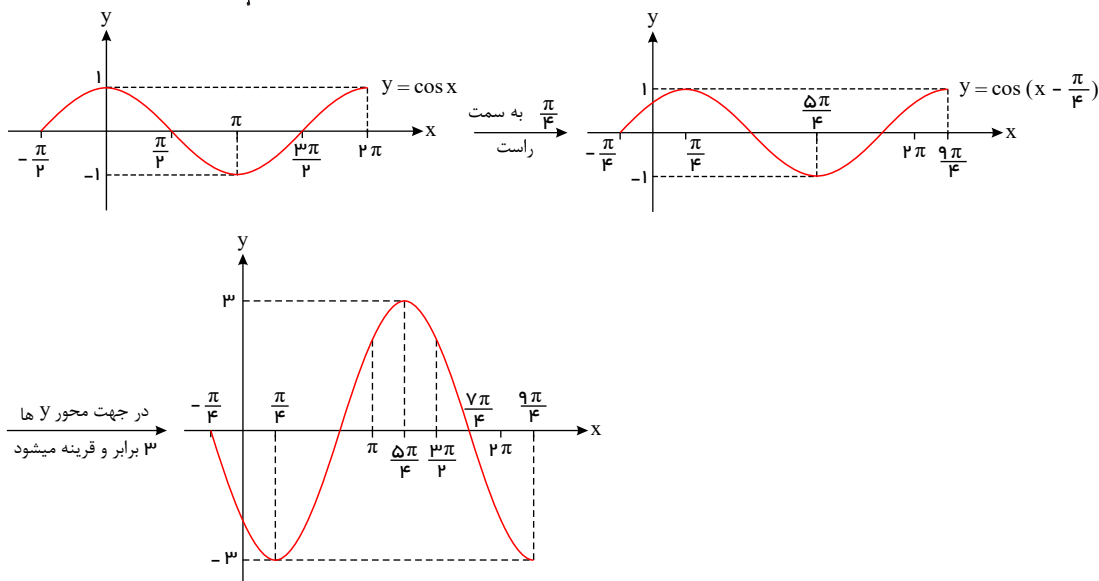
گزینه ۴

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



اگر خط $y = -1$ رسم کنیم در بازه گفته شده نمودار را در سه نقطه قطع می کند، پس گزینه ۴ نادرست است.

گزینه ۶ باید توجه داشت که $y = 2 \tan x \cdot \cot x = 2(1) = 2$ اما قبل از ساده کردن باید دامنه بیابیم.

$$y = \frac{2 \sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{ \text{ریشه های مخرج} \}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجتماع می گیریم}} x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$$

گزینه ۷

$$y = \sin ax \xrightarrow{\text{دوره ی تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|} \text{ می دانیم}$$

$$y = a + \cos\left(-\frac{1}{3} + bx\right)\pi \rightarrow y = a + \cos\left(\frac{-\pi}{3} + \pi bx\right)$$

$$\xrightarrow{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin \alpha} y = a + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi bx\right) \rightarrow y = a + \sin \pi bx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \frac{2}{3}T = 9 \rightarrow T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون بلافاصله بعد از محور عرض، نمودار نزول پیدا می کند، بنابراین ضریب کمان سینوس باید منفی باشد پس $b = -\frac{1}{3}$ است.

$$f(x) = a + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) \xrightarrow{\text{صنق}} 1 = a + 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{3}x$$

$$\rightarrow f(29) = 1 - \sin \frac{29\pi}{3} = 1 - \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۴ بنابر فرض سؤال داریم:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 + \sin x \Rightarrow f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \quad (1)$$

در معادله (1) $x + \frac{\pi}{2} = t$ قرار می دهیم:

$$x + \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos t \Rightarrow f(t) = -\cos t \quad (2)$$

در نتیجه:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \stackrel{(2)}{=} -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ ۹

$$\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

گزینه ۳ ۱۰

$$f(x) = 3 - 4 \sin x \rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times(-4)} 4 \geq -4 \sin x \geq -4$$

$$\rightarrow 3 + 4 \geq 3 - 4 \sin x \geq 3 - 4 \rightarrow 7 \geq f(x) \geq -1 \rightarrow R_f = [-1, 7]$$